



# Une methode particulare pour les equations non lineaires de diffusion convection en dimension un

Yann Brenier

## ► To cite this version:

Yann Brenier. Une methode particulare pour les equations non lineaires de diffusion convection en dimension un. [Rapport de recherche] RR-0422, INRIA. 1985. inria-00076134

**HAL Id: inria-00076134**

**<https://inria.hal.science/inria-00076134>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE ROCQUENCOURT

# Rapports de Recherche

N° 422

## UNE MÉTHODE PARTICULAIRE POUR LES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES DE DIFFUSION CONVECTION EN DIMENSION UN

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Yann BRENIER

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P. 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél. (3) 954 90 20

Juillet 1985

**UNE METHODE PARTICULAIRE POUR LES EQUATIONS**  
**NON LINEAIRES DE DIFFUSION CONVECTION EN**  
**DIMENSION UN**

**Yann BRENIER**

**ABSTRACT**

Chorin's particle method for reaction diffusion equations is extended to possibly degenerate advection reaction diffusion equations, including scalar conservation laws. Convergence is proved in the case when there is no reaction term, even if the solutions are not smooth (discontinuous).

**RESUME**

La méthode particulière de Chorin pour les équations de réaction diffusion est généralisée aux équations non linéaires de convection réaction diffusion éventuellement dégénérées et en particulier aux lois de conservation scalaires. La convergence est démontrée, en l'absence de termes de réaction, même si les solutions ne sont pas régulières.

**KEY WORDS**

Particle methods, non-linear advection diffusion equations.

**MOTS CLES**

Méthodes particulières - équations de diffusion convection non-linéaires.

## 0. INTRODUCTION

Il y a quelques années, Chorin [5] a introduit une méthode particulière pour l'équation de réaction diffusion :

$$(0.1) \quad D_t u - D_{xx} u = C(u), \quad u(t,x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

(où on note  $D_t$  et  $D_x$  les dérivées partielles en temps et en espace),  $C$  étant une fonction réelle donnée. Le principe de cette méthode est le suivant :

a) on utilise une discrétisation particulière de la dérivée en  $x$  de la donnée initiale  $u(0,x)$ , en l'approchant par une somme finie de masses de Dirac;

b) à chaque pas de temps, on déplace chaque particule (i.e. chaque masse de Dirac) par la technique de marche aléatoire pour simuler le terme de diffusion de (0.1);

c) enfin on modifie le poids de chaque particule pour prendre en compte le terme de réaction.

L'analyse de ce schéma a été commencée par Hald [8], mais seulement pour une version assez éloignée de l'original (voir [9]). Dans cet article, on propose d'abord une généralisation de l'algorithme de Chorin qu'on peut appliquer à l'équation non linéaire de réaction diffusion convection :

$$(0.2) \quad D_t u + D_x (B(u)) = C(u) + D_{xx} (A(u)), \quad u(t,x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

où  $B, C$  et  $A$  sont des fonctions réelles données,  $A$  étant supposée croissante au sens large :

$$(0.3) \quad A'(w) \geq 0, \quad w \in \mathbb{R}.$$

En particulier, ce schéma s'applique aux lois de conservation scalaires



$$(0.4) \quad D_t u + D_x(B(u)) = 0$$

(en posant  $A=C=0$ ), dont on sait que les solutions peuvent être singulières (apparition d'ondes de choc). Dans ce cas, le schéma a été déjà introduit et étudié par l'auteur sous le nom de méthode de transport et écroulement [2,4].

On aborde ensuite dans cet article la question de la convergence du schéma, qui pose deux problèmes de natures différentes :

a) L'approximation de solutions singulières à l'aide de méthodes particulières est un problème largement (pour ne pas dire totalement) ouvert. On sait en effet que les résultats de convergence récemment obtenus (dans [10-1-13...]) pour des méthodes particulières concernant exclusivement les solutions régulières d'équations, il est vrai, considérablement plus compliquées que (0.2), à savoir les équations d'Euler en mécanique des fluides.

b) L'utilisation de la marche aléatoire pour la simulation de termes de diffusion n'a pas été beaucoup analysée dans le contexte de l'analyse numérique (voir néanmoins [6-7-8-9...]), encore moins lorsqu'il s'agit de diffusion non linéaire comme dans (0.2).

Dans cet article, on prouvera la convergence du schéma, avec quelques restrictions. Ainsi, on abandonnera le terme de réaction  $C$  et on se restreindra à l'équation :

$$(0.5) \quad D_t u + D_x(B(u)) = D_{xx}(A(u))$$

en effet, bien que le terme de réaction soit a priori le moins difficile à traiter puisqu'il ne met pas en jeu les dérivées de la solution, la technique de démonstration utilisée dans cet article serait considérablement compliquée par son introduction. Ensuite, on n'utilisera pas la méthode de marche aléatoire ordinaire mais une version déterministe, qui nous permettra de reformuler le schéma sous la forme très maniable :

$$(0.6) \quad u_{n+1} = T(q)u_n,$$

où  $u_n$  (resp.  $u_{n+1}$ ) désigne la solution approchée au  $n$ ème pas de temps (resp.  $(n+1)$ ème) et où  $T(q)$  est un opérateur non linéaire dépendant des

données au travers de l'argument  $q$ . On montrera que cet opérateur est en fait une approximation de l'opérateur de semi-discrétisation en temps de (0.5) que l'auteur a introduit dans [3], ce qui permettra de prouver que les solutions approchées convergent bien vers les solutions de (0.5) au sens de Volpert et Hudjaev [11] et vers celles de (0.4) au sens de Kruzhkov [12].

Ainsi, dans le cas de l'équation de diffusion convection non linéaire (0.5), on aura résolu les deux problèmes qu'on s'est posés plus haut et qui restent largement ouverts dans le cas infiniment plus délicat des équations de la mécanique des fluides.

On ne présentera pas dans cet article de résultats numériques et on se référera à ceux obtenus dans [2] pour l'équation (0.4). On peut néanmoins affirmer que l'efficacité du schéma, très grande dans le cas (0.4) [2], est considérablement diminuée par l'introduction du terme de diffusion, ce qui est tout à fait cohérent avec les résultats de l'analyse théorique faite dans cet article.

## I - LE SCHEMA

Dans cette section, on décrit le schéma pour l'équation (0.2) lorsque la donnée initiale  $u(0,x)$  est définie sur la droite réelle toute entière (il n'y a donc pas de conditions aux limites). De plus on va simplifier la description en supposant :

$$(1.1.a) \quad u(0,x) = 0 \quad \text{pour } -x \text{ assez grand ;}$$

$$(1.1.b) \quad C(0) = 0.$$

Ces deux hypothèses sont suffisantes pour garantir que les solutions  $u(t,x)$  de (0.2) vérifient à chaque temps  $t$  :

$$(1.2.a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(t,x) = 0$$

On peut donc à tout instant écrire  $u(t,x)$  sous la forme :

$$(1.2.b) \quad u(t,x) = \int_{-\infty}^x D_x u(t,\xi) d\xi.$$

Pour approcher  $u(t,x)$  on introduit d'abord deux paramètres de discrétisation  $\Delta u$  et  $\Delta t$  pour les variables  $u$  et  $t$ . On introduit ensuite la discrétisation particulière suivante :

$$(1.3) \quad D_x u(0,x) = \sum_{i=1,P} W_0(i) \delta(x-X_0(i)),$$

où  $\delta(y)$  est la masse de Dirac en  $y=0$ ,  $X_0(i)$  la position de la  $i$ ème particule suivant l'axe des  $x$ ,  $W_0(i)$  son poids et  $P$  le nombre total de particules. On suppose que tous les poids sont bornés :

$$(1.4) \quad |W_0(i)| \leq \Delta u, \quad i=1, \dots, P.$$

En prenant (1.3) en compte et en intégrant (2.5) par rapport à  $x$ , on obtient pour la donnée initiale  $u(0,x)$  l'approximation  $u_0(x)$  définie par :

$$(1.5) \quad u_0(x) = \sum_{i=1,P} W_0(i) Y(x-X_0(i))$$

où  $Y$  désigne la fonction d'Heaviside

$$(Y(y) = 0 \text{ si } y < 0, 1 \text{ si } y > 0, Y(0) = 1/2).$$

Pour chaque couple de particules  $i,j$  on définit :

$$(1.6) \quad Y_{X_0}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (X_0(i),i) < (X_0(j),j) \\ 0 & \text{si } (X_0(i),i) > (X_0(j),j) \\ 1/2 & \text{si } i=j \end{cases}$$

où on doit considérer  $(X_0(i),i) < (X_0(j),j)$  au sens lexicographique (i.e. ou bien  $X_0(i) < X_0(j)$  ou bien  $X_0(i) = X_0(j)$  et  $i < j$ ). Ensuite on introduit

$$(1.7) \quad U_0(i) = \sum_{j=1,P} W_0(j) Y_{X_0}(i,j),$$

puis on modifie la position et le poids de chaque particule et on en définit les nouvelles valeurs  $X_1(i)$ ,  $W_1(i)$  par :

$$(1.8) \quad X_1(i) = X_0(i) + \Delta t \cdot B'(U_0(i)) + (2 \Delta t \cdot A'(U_0(i)))^{1/2} \cdot \eta(i)$$

$$(1.9) \quad W_1(i) = W_0(i) \exp(\Delta t \cdot C'(U_0(i)))$$

où on note  $\eta(i)$  une variable aléatoire Gaussienne réduite (d'espérance nulle et d'écart type égal à 1). Ensuite, on définit l'approximation de la solution au premier pas de temps  $\Delta t$  par :

$$(1.10) \quad u_1(x) = \sum_{i=1, P} W_1(i) Y(x - X_1(i))$$

Ainsi on a décrit le premier pas de temps complètement et les autres s'effectuent de la même manière. Le schéma ainsi décrit est (à de légères modifications près) la généralisation :

i) du schéma de Chorin [5] lorsque :

$$(1.11) \quad B(u) = 0, \quad A(u) = 0$$

ii) de la méthode de transport écroulement [2,4] dans le cas :

$$(1.12) \quad A(u) = 0, \quad C(u) = 0$$

Cet algorithme est stable pour la variation totale lorsque  $C$  est Lipschitzienne, il la diminue lorsque  $C$  est nulle, mais il n'est pas monotone. Voyons cela de plus près. La variation totale de :

$$(1.13) \quad u_n(x) = \sum_{i=1, P} W_n(i) Y(x - X_n(i))$$

est donnée par :

$$(1.14) \quad TV(u_n) = \sum_{i=1, P} |W_n(i)|$$

Introduisons :

$$(1.15) \quad Lip(C) = \sup_{w \in \mathbb{R}} |C'(w)|$$



De (1.9), on tire :

$$(1.16) \quad |W_1(i)| \leq |W_0(i)| \exp(\text{Lip}(C)\Delta t)$$

et donc (par récurrence):

$$(1.17) \quad |W_n(i)| \leq |W_0(i)| \exp(\text{Lip}(C)n\Delta t)$$

d'où :

$$(1.18) \quad \text{TV}(u_n) \leq \text{TV}(u_0) \exp(\text{Lip}(C)n\Delta t)$$

ce qui signifie bien que le schéma est stable pour la variation totale et qu'il la diminue lorsque  $C=0$ . Néanmoins, bien que les solutions exactes  $u(t,x)$ ,  $v(t,x)$  de (0.2) ont la propriété de monotonie suivante :

$$(1.19) \quad u(0,x) \geq v(0,x) \text{ p.p. } \implies u(t,x) \geq v(t,x) \text{ p.p.,}$$

le schéma introduit n'est pas monotone en ce sens qu'on n'a pas :

$$(1.20) \quad u_0(x) \geq v_0(x) \implies u_n(x) \geq v_n(x)$$

Considérons par exemple la donnée initiale :

$$(1.21) \quad u(0,x) = u_0(x) = 2U \cdot (Y(x) - Y(x-h)),$$

où  $Y$  est la fonction d'Heaviside,  $U$  et  $h$  deux constantes positives. Cela correspond à la distribution de particules suivante :

$$(1.22) \quad P=2, X_0(1)=0, W_0(1)=2U, U_0(1)=U, X_0(2)=h, W_0(2)=-2U, U_0(2)=U$$

D'après (1.8-9), on obtient après un pas de temps :

$$(1.23a) \quad X_1(1) = B'(U) \Delta t + (2\Delta t A'(U))^{1/2} n(1)$$

$$(1.23b) \quad X_1(2) = h + B'(U) \Delta t + (2\Delta t A'(U))^{1/2} n(2)$$

$$(1.23c) \quad W_1(1) = 2U \exp(\Delta t C'(U)) \quad W_1(2) = -2U \exp(\Delta t C'(U))$$

$$(1.23d) \quad u_1(x) = 2U \exp(\Delta t C'(U)) \cdot (Y(x-X_1(1)) - Y(x-X_1(2)))$$

Du fait que  $C(0)=0$ , la constante 0 est solution de (0.2) et aussi du schéma. Comme  $u_0$  est positive ou nulle, il faudrait donc que  $u_1$  le soit aussi pour que le schéma soit monotone. Mais d'après (1.23a...d),  $u_1$  n'est plus positive dès que :

$$(1.24) \quad \eta(1) - \eta(2) > h \cdot (2 \Delta t A'(U))^{-1/2}$$

ce qui peut fort bien se produire puisque  $\eta(1)$  et  $\eta(2)$  sont deux tirages indépendants d'une variable aléatoire Gaussienne.

### Le schéma modifié

Dans la formule (1.8) on remplace la variable aléatoire Gaussienne réduite  $\eta(i)$  par :

$$(1.30) \quad r_c(N \cdot U_0(i))$$

où  $N$  est un nombre entier positif grand et  $r_c$  est défini comme suit : Soit la fonction d'erreur :

$$(1.31a) \quad \operatorname{erf}(x) = \int_{-\infty}^x (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} s^2) ds,$$

On définit  $r(w)$  pour  $0 < w < 1/2$  par :

$$(1.31b) \quad \operatorname{erf}(r(w)) = 2w$$

on l'étend par symétrisation et périodicité à  $w \in \mathbb{R}$  :

$$(1.31c) \quad r(-w) = r(w)$$

$$(1.31d) \quad r(w+1) = r(w)$$

et on fait la troncature suivante :

$$(1.31e) \quad r_c(w) = \inf(c, \sup(-c, r(w)))$$

où  $c$  est un nombre réel positif grand. Ainsi la formule (1.30) est bien

définie. Il reste à expliquer la substitution de  $\eta(i)$  par (1.30). Comme  $\eta(i)$  est un tirage d'une variable aléatoire Gaussienne réduite, on peut tout aussi bien l'écrire sous la forme  $r(\theta(i))$  où  $\theta(i)$  est une variable aléatoire uniformément distribuée dans  $]0,1[$ . La substitution proposée revient donc i) à tronquer la fonction  $r$

ii) à remplacer  $\theta(i)$  par le nombre  $N.U_0(i)$  ou encore  $N.U_0(i)$  modulo 1 (compte tenu de la périodicité de  $r_c$ ).

L'avantage essentiel de cette modification n'est pas tant de rendre le schéma déterministe que d'introduire une corrélation du mouvement des différentes particules, via  $U_0$ , ce qui va permettre, de reformuler le schéma, au moins lorsque le terme de réaction est nul, et d'analyser sa convergence.

## 2. NOUVELLE FORMULATION QUAND LE TERME DE REACTION EST ABSENT.

Dans le cas de l'équation (0.5) le terme de réaction  $C(u)$  disparaît et l'équation (1.9) régissant l'évolution du poids des particules devient :

$$(2.1) \quad W_1(i) = W_0(i), \quad i=1, \dots, P$$

ce qui implique que les poids restent constants au cours du temps.

$$(2.2) \quad W_n(i) = W_0(i), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Par conséquent si on suppose qu'au temps 0 tous les poids sont égaux au signe près, c'est-à-dire :

$$(2.3) \quad W_0(i) = s(i) \Delta u, \quad \text{avec } s(i) = \pm 1,$$

alors on aura :

$$(2.4) \quad W_n(i) = s(i) \Delta u.$$

Il s'ensuit qu'on peut reformuler le schéma (modifié) ainsi :

$$(2.5) \quad U_n(i) = \sum_{j=1, P} s(j) \Delta u Y_{X_n}(i, j)$$

$$(2.6) \quad Y_{X_n}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n(j) > X_n(i) \\ 1 & \text{si } X_n(j) < X_n(i) \text{ ou } X_n(i) = X_n(j) \text{ et } i > j \\ 1/2 & \text{si } i=j \end{cases}$$

$$(2.7) \quad X_{n+1}(i) = X_n(i) + \Delta t B'(U_n(i)) + (2\Delta t A'(U_n(i)))^{1/2} r_c(NU_n(i))$$

$$(2.8) \quad u_{n+1}(x) = \sum_{i=1, P} s(i) \Delta u Y(x - X_{n+1}(i))$$

On déduit de (2.5-6) l'importante propriété :

$$(2.9) \quad U_n(i) \in \{(j+1/2) \Delta u ; j \in \mathbb{Z}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall i=1, \dots, P$$

qui va nous permettre de reformuler le schéma d'une façon telle que l'analyse de la convergence sera grandement facilitée.

Proposition 1

Dans le cas de l'équation (0.5), et en faisant l'hypothèse (2.3), on peut trouver une fonction  $q$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que :

$$(2.10) \quad u_{n+1}(x) = (T(q)u_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(u_n(x-q(w)), w) dw$$

où :

$$(2.11) \quad K(v, w) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < v < w \\ -1 & \text{si } 0 > v > w \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Cette fonction  $q$  est donnée explicitement par :

$$(2.12) \quad q(w) = \Delta t B'((i-1/2) \Delta u) + (2 \Delta t A'((i-1/2) \Delta u))^{1/2} \cdot r_c(N(i-1/2) \Delta u)$$

pour tout  $w$  dans  $](i-1) \Delta u, i \Delta u [$ , et tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$  ( $r_c$  étant défini par (1.31)).

Démonstration de la proposition 1

Elle découle du lemme suivant :

LEMME 1 :

Soit  $u(x)$  une fonction constante par morceaux de la forme :

$$(2.13) \quad u(x) = \sum_{i=1, P} W(i) Y(x-X(i)) \quad (Y=\text{fonction d'Heaviside})$$

posont :

$$(2.14) \quad U(i) = \sum_{j=1, P} W(j) Y_X(i, j) \text{ où } Y_X(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } (X(i), i) < (X(j), j) \\ 1/2 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } (X(i), i) > (X(j), j) \end{cases}$$

alors, on a :

$$(2.15) \quad K(u(x), w) = \sum_{j=1, P} \text{sign}(W(j)) 1\{(x > X(j))\} 1\{|w - U_n(j)| < \frac{1}{2} |W_n(j)|\}$$

où K est défini par (2.11) et  $1\{\omega \in \Omega\} = 1$  si  $\omega \in \Omega$ , 0 si  $\omega \notin \Omega$ .

Avant de prouver le lemme 1, déduisons en la proposition 1. On a :

$$\int K(u_n(x - q(w)), w) dw = \sum_{i=1, P} s(i) \int 1\{(x > X_n(i) + q(w))\} \cdot 1(|w - U_n(i)| < \frac{\Delta u}{2}) dw$$

A cause de (2.9), on sait que  $U_n(i) \in \{(j+1/2) \Delta u ; j \in \mathbb{Z}\}$ . Par conséquent, on déduit de (2.12) que :

$$(2.16) \quad q(w) = \text{constante} = q(U_n(i)) \text{ pour } |w - U_n(i)| < \frac{1}{2} \Delta u$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int K(u_n(x - q(w)), w) dw &= \sum_{i=1, P} s(i) \Delta u 1\{(x > X_n(i) + q(U_n(i)))\} \\ &= \sum_{i=1, P} s(i) \Delta u Y(x - X_{n+1}(i)) \text{ (par (2.7), (2.12))} \\ &= u_{n+1}(x) \text{ (par (2.8)), ce qui prouve la} \\ &\quad \text{proposition 1.} \end{aligned}$$

#### Preuve du Lemme 1

Pour prouver (2.15), il suffit de vérifier la relation intégrale suivante pour toute fonction test  $f(w)$  :

$$(2.17) \quad \int K(u(x), w) f(w) dw = \sum_{j=1, P} \int \text{sign}(W(j)) 1\{(x > X(j))\} 1\{|w - U(j)| < \frac{|W(j)|}{2}\} f(w) dw$$

De (2.11), on déduit :

$$(2.18) \quad \int K(u(x), w) f(w) dw = F(u(x)) \quad \text{où} \quad F(v) = \int_0^v f(w) dw$$

et le terme de droite dans (2.17) peut se réécrire :

$$(2.19) \quad \sum_{j=1, P} 1 \{ x > X(j) \} \cdot (F(U(j) + \frac{W(j)}{2}) - F(U(j) - \frac{W(j)}{2}))$$

Introduisons l'unique permutation  $(j_1, \dots, j_p)$  de  $(1, \dots, P)$  telle que la suite  $(X(j_k), j_k)$  soit croissante par rapport à  $k$  pour l'ordre lexicographique :

$$(2.20) \quad (x, p) < (y, q) \iff \text{si } x < y \quad \text{ou} \quad (x=y \text{ et } p < q)$$

et notons  $k(x)$  le plus grand indice  $k$  tel que  $X(j_k) < x$ . On peut alors réécrire (2.19) comme suit :

$$(2.21) \quad \sum_{k=1, k(x)} (F(U(j_k) + \frac{W(j_k)}{2}) - F(U(j_k) - \frac{W(j_k)}{2}))$$

Il découle par ailleurs de (2.14) que :

$$(2.22) \quad U(j_k) - \frac{1}{2} W(j_k) = U(j_{k-1}) + \frac{1}{2} W(j_{k-1}) \quad \text{et} \quad U(j_1) - \frac{1}{2} W(j_1) = 0,$$

donc (2.21) devient :

$$F(U(j_{k(x)}) + \frac{1}{2} W(j_{k(x)})) - F(0), \text{ c'est-à-dire } F(u(x)) - F(0) = F(u(x)).$$

Ainsi on a prouvé (2.17) et par conséquent le lemme 1.

### III. CONVERGENCE DU SCHEMA.

Dans la première section, on a introduit une méthode particulière qui généralise l'algorithme de Chorin pour l'équation (0.2). Puis, dans la deuxième section, on a donné une nouvelle formulation (2.10-11-12) du schéma dans le cas de l'équation (0.5) où il n'y a pas de terme de réaction. Grâce à cette formulation, nous pouvons maintenant démontrer la convergence du schéma vers les solutions de (0.5) au sens de Volpert et Hudjaev [11]. Plus précisément, on appelle solution entropique ou solution au sens de Volpert et Hudjaev de l'équation (0.5) toute fonction  $u(t,x)$  définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , localement intégrable, vérifiant au sens des distributions l'inégalité suivante :

$$(3.1) \quad D_t(h(u)) + D_x(B_h(u)) \leq D_{xx}(A_h(u)), \quad u=u(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

pour toute fonction lipschitzienne convexe  $h$ , avec les notations :

$$(3.2) \quad B_h(v) = \int_0^v h'(w)B'(w)dw, \quad A_h(v) = \int_0^v h'(w)A'(w)dw.$$

On remarquera que toute solution classique vérifie (3.1) et que toute solution entropique est solution faible de (0.5) au sens des distributions. La notion de solution entropique permet d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy, au moins dans le cas particulier de l'équation (0.4) [12], et aussi dans le cas général suivant Volpert et Hudjaev [11]. Dans la suite, pour faciliter les démonstrations on considérera le problème de Cauchy uniquement pour des données initiales périodiques en espace. Cela revient à considérer le problème aux limites avec conditions de périodicité aux bords (à ce propos voir la prochaine remarque).

Enonçons le résultat principal :



**THEOREME 1 :**

Supposons que les fonctions  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $A^{1/2}$  sont lipschitziennes. Soit  $u(0,x)$  une fonction mesurable bornée périodique de période  $L$ :

$$(3.3) \quad u(0, x+L) = u(0, x), \text{ p.p.}$$

et de variation bornée sur  $(0, L)$  :

$$(3.4) \quad \sup_{h \neq 0} \int_0^L |h|^{-1} \cdot (u(0, x+h) - u(0, x)) |dx| < +\infty$$

Supposons qu'il existe une unique solution entropique  $u(t, x)$  de (0.5) (au sens de (3.1-2)) dans  $C^0(\mathbb{R}_+; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$  de période  $L$  en  $x$ .

Approchons  $u(0, \cdot)$  par une fonction constante par morceaux de période  $L$  à variation bornée  $u_0$  telle que :

$$(3.5) \quad u_0(x) \in \{j\Delta u ; j \in \mathbb{Z}\} \text{ p.p.,} \quad \Delta u \rightarrow 0.$$

Définissons  $q$  et  $T(q)$  par (2.10-11-12) et posons  $u_n = T(q)^n u_0$ .

Choisissons les paramètres de discrétisation  $\Delta t$ ,  $\Delta u$ ,  $N$  et  $c$  de sorte que :

$$(3.6) \quad \Delta t = \frac{t}{n} ; \Delta u = n^{-2-3\delta} ; N = n^{1+\delta} ; c = ((1 + \frac{\delta}{2}) \text{Log} n)^{1/2} \text{ avec } \delta > 0$$

Alors :

$$(3.7) \quad \int_0^L |u(t, x) - u_n(x)| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

**REMARQUE**

Nous ne considérons ici que les données initiales  $u(0,x)$  périodiques en  $x$ , en contradiction avec la section 1; où on faisait l'hypothèse (1.1a) pour définir le schéma numérique. En fait dans les deux cas, on a choisit la voie la plus facile : dans la section 1, il est plus commode de supposer (1.1a) pour décrire le schéma, mais pour prouver le théorème 1 il est plus simple de considérer le cas périodique puisque on utilise un résultat obtenu ailleurs [4] pour lequel l'hypothèse de périodicité était faite. De tout façon, aucune de ces hypothèses (périodicité ou (1.1a)) n'est vraiment importante.

**IV. UNE CLASSE D'OPERATEURS  $L_1$ .**

Preliminaires

Soit le tore unidimensionnel  $X = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ , soit  $L_1(X)$  (respectivement  $L_1(X)$  l'espace des fonctions mesurables  $u(x)$  (resp.  $f(x,w)$ ) définies sur  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) telles que

$$(4.1) \quad |u|_{L_1} = \int_X |u(x)| dx = \int_0^L |u(x)| dx < +\infty$$

(resp. :

$$(4.2) \quad |f|_{L_1} = \int_X \int_{\mathbb{R}} |f(x,w)| dx dw < +\infty ;$$

$$(4.3) \quad u(x+L) = u(x), \text{ p.p. (resp. } f(x+L,w)=f(x,w) \text{ p.p.)}.$$

Pour toute  $u$  dans  $L_1(X)$ , et  $f$  dans  $L_1(X \times \mathbb{R})$ , on définit :

$$(4.4) \quad TV(u) = \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \cdot \int_X |u(x+h)-u(x)| dx \quad (\text{variation totale de } u)$$

$$(4.5) \quad TV_x(f) = \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \cdot \int_X \int_{\mathbb{R}} |f(x+h,w)-f(x,w)| dx dw \quad (\text{variation totale en } x)$$

$$(4.6) \quad TV_w(f) = \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \cdot \int_X \int_{\mathbb{R}} |f(x, w+h) - f(x, w)| \, dx dw$$

(variation totale en w)

On rappelle que, lorsque u et f sont régulières, on a :

$$(4.7) \quad TV(u) = \int_X |D_x u(x)| \, dx$$

$$(4.8) \quad TV_x(f) = \int_X \int_{\mathbb{R}} |D_x f(x, w)| \, dx dw$$

$$(4.9) \quad TV_w(f) = \int_X \int_{\mathbb{R}} |D_w f(x, w)| \, dx dw$$

On définit maintenant l'opérateur j de  $L_1(X)$  dans  $L_1(X \times \mathbb{R})$  par :

$$(4.10) \quad ju(x, w) = K(u(x), w) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < w < u(x) \\ -1 & \text{si } 0 > w > u(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (x, w) \in X \times \mathbb{R}$$

Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes :

$$(4.11) \quad \forall u, v \in L_1(X), u \geq v \text{ p.p.} \implies ju \geq jv \text{ p.p.};$$

$$(4.12) \quad \forall u, v \in L_1(X) \quad |ju - jv|_{L_1} = |u - v|_{L_1};$$

$$(4.13) \quad j0 = 0 \text{ (où on note } 0 \text{ la fonction } 0)$$

$$(4.14) \quad TV_x(ju) = TV(u);$$

$$(4.15) \quad TV_w(ju) \leq 2L;$$

$$(4.16) \quad |ju(x, w)| \leq 1 \text{ et } (a \leq u(x) \leq b \implies ju(x, w) = 0 \text{ pour } w \notin [a, b])$$

Les démonstrations sont élémentaires (sauf (4.14) voir [4]).

Définitions et propriétés.

Pour toute fonction  $q=q(w,y)$  définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , telle que :

$$(4.17) \quad q(w, y+1) = q(w, y) \quad (q \text{ est périodique en } y \text{ de période } 1)$$

$$(4.18) \quad \int_0^1 \sup_{w \in \mathbb{R}} |q(w, y)| dy < +\infty$$

on définit l'opérateur non linéaire  $T(q)$  par :

$$(4.19) \quad \begin{aligned} (T(q)u)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 j(u(x-q(w,y)), w) dw dy, \quad \text{p.p., pour } u \text{ dans } L_1(X). \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 K(u(x-q(w,y)), w) dw dy. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une contraction dans  $L_1(X)$  qui vérifie les propriétés suivantes :

$$(4.20) \quad (T(q)u)(x+L) = (T(q)u)(x), \quad \text{p.p.}$$

$$(4.21) \quad T(q)C = C, \quad \text{pour toute constante } C(x) = \text{cst} = C;$$

$$(4.22) \quad |T(q)u - T(q)v|_{L_1} \leq |u - v|_{L_1}$$

$$(4.23) \quad u \geq v \quad \text{p.p.} \implies T(q)u \geq T(q)v \quad \text{p.p.};$$

$$(4.24) \quad \int_X (T(q)u)(x) dx = \int_X u(x) dx ;$$

$$(4.25) \quad TV(T(q)u) \leq TV(u) ;$$

Toutes ces propriétés découlent aisément de (4.19) et (4.11....16) (voir également [4]). On a de plus le principe du maximum :

$$(4.26) \quad a \leq u(x) \leq b \implies a \leq T(q)u(x) \leq b, \quad \text{p.p. (à cause de (4.21-23))}$$

Il s'ensuit que, pour  $a$  et  $b$  fixé, on peut considérer  $T(q)$  comme un opérateur agissant sur la partie de  $L_1(X)$  :

$$L_1^{ab}(X) = \{ u \in L_1(X) ; a \leq u(x) \leq b, \text{ p.p. } \}$$

On peut alors réécrire  $T(q)$  comme suit :

$$T(q)u(x) = \int_a^b \int_0^1 j u(x - q(w, y), w) dw dy,$$

et seules les valeurs de  $q(w, y)$  pour  $a \leq w \leq b$  comptent.

### Dépendance de $T(q)$ par rapport à $q$ .

On s'intéresse maintenant aux variations de l'opérateur  $T(q)$  lorsque on modifie  $q$  a) soit en l'approchant par une fonction plus régulière ; b) soit en la remplaçant par une fonction  $q_N = q_N(w)$  ne dépendant que de  $w$  ; c) soit en l'approchant, lorsque  $q$  ne dépend que de  $w$ , par une fonction constante par morceaux. On a les estimations suivantes :

#### Proposition 2

On a pour  $u$  dans  $L_1^{ab}(X)$ , et  $q, \hat{q}$  satisfaisant (4.17-18) :

$$(4.27) \quad |T(q)u - T(\hat{q})u|_{L_1} \leq TV(u) \cdot \int_0^1 \sup_{a \leq w \leq b} |q(w, y) - \hat{q}(w, y)| dy$$

#### Proposition 3

Soit  $q$  satisfaisant (4.17-18). Soit  $q_N$ , définie pour tout entier positif  $N$  par :

$$(4.28) \quad q_N(w, y) = q_N(w) = q(w, N \cdot (\frac{w-a}{b-a})) ;$$

Alors on a pour tout  $u$  dans  $L_1^{ab}(X)$  :

$$(4.29) \quad |T(q)u - T(q_N)u|_{L_1} \leq \frac{1}{N} \cdot (b-a) \cdot (4L + \text{Lip}_w(q) \cdot TV(u)), \text{ où}$$

$$\text{Lip}_w(q) = \sup_{\substack{a \leq w \leq b \\ y \in \mathbb{R}}} |D_w q(w, y)|.$$

**Proposition 4**

Soit  $q=q(w)$  une fonction lipschitzienne de  $w$ .

Pour tout entier positif  $M$ , on considère l'approximation constante par morceaux  $q^{(M)}$ , définie sur  $[a,b]$  par :

$$(4.30) \quad q^{(M)}(w) = q(a + \frac{i-1/2}{M} \cdot (b-a)), \text{ pour}$$

$$(\frac{i-1}{M}) < (\frac{w-a}{b-a}) < \frac{i}{M}, \quad i=1, \dots, M.$$

Alors, on a pour  $u$  dans  $L_1^{ab}(X)$ ,

$$(4.31) \quad |T(q)u - T(q^{(M)})u|_{L_1} \leq TV(u) \cdot (\frac{b-a}{M}) \cdot Lip(q),$$

$$\text{où } Lip(q) = \sup_{a \leq w \leq b} |D_w q(w)|.$$

**Démonstrations.**

On remarque tout d'abord que la proposition 4 est une conséquence immédiate de la proposition 2, puisque :

$$\int_0^1 \sup_{a \leq w \leq b} |q(w) - q^{(M)}(w)| dy = \sup_{a \leq w \leq b} |q(w) - q^{(M)}(w)|$$

$$= \sup_{i=1, \dots, M} \sup_{\frac{i-1}{M} < \frac{w-a}{b-a} < \frac{i}{M}} |q(w) - q(a + \frac{i-1/2}{M} \cdot (b-a))|$$

$$\leq (\frac{b-a}{M}) \cdot Lip(q).$$

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 2. On a pour  $u$  dans  $L_1^{ab}(X)$  :

$$T(q)u(x) - T(\hat{q})u(x) = \int_b^a \int_0^1 (ju(x-q(w,y),w) - ju(x-\hat{q}(w,y),w)) dw dy$$

Donc

$$\begin{aligned} |T(q)u - T(\hat{q})u|_{L_1} &= \int_X |T(q)u(x) - T(\hat{q})u(x)| dx \\ &\leq \int_X \int_a^b \int_0^1 |ju(x - q(w, y), w) - ju(x - \hat{q}(w, y), w)| dx dw dy \\ &= \int_X \int_a^b \int_0^1 |ju(x + \hat{q}(w, y) - q(w, y), w) - ju(x, w)| dx dw dy \end{aligned}$$

(compte tenu de ce que  $ju(x, w)$  est périodique par rapport à  $x$ )

$$\leq \int_0^1 TV_x(ju) \cdot \sup_{a \leq w \leq b} |q(w, y) - \hat{q}(w, y)| dy, \text{ (par (4.14))},$$

ce qui prouve (4.27) et par conséquent la proposition 2. La démonstration de la proposition 3, plus technique, est rejetée en annexe.

Considérons maintenant l'erreur cumulée obtenue lorsque :

- i) on approche  $u$  par une fonction  $\hat{u}$  plus régulière
- ii) on approche  $q$  par une fonction lipschitzienne  $\hat{q}$
- iii) on remplace  $\hat{q}$  par  $\hat{q}_N$  et ensuite  $\hat{q}_N^{(M)} = (\hat{q}_N)^{(M)}$ .

On obtient alors le résultat suivant :

**Proposition 5**

L'erreur  $|T(q)u - T(\hat{q}_N^{(M)})\hat{u}|_{L_1}$  est majorée par

$$\begin{aligned} (4.32) \quad e(u, \hat{u}) &= TV(\hat{u}) \cdot \int_0^1 \sup_{a \leq w \leq b} |q(w, y) - \hat{q}(w, y)| dy \\ &+ \frac{b-a}{N} \cdot (4L + Lip_w(\hat{q})TV(\hat{u})) + \frac{b-a}{M} \cdot (Lip_w(\hat{q}) + \frac{N}{b-a} \cdot Lip_y(\hat{q}))TV(\hat{u}) \\ &+ |u - \hat{u}|_{L_1} \end{aligned}$$

$$\text{où } Lip_w(\hat{q}) = \sup_{\substack{a \leq w \leq b \\ y \in \mathbb{R}}} |D_w \hat{q}(w, y)| \quad Lip_y(\hat{q}) = \sup_{\substack{a \leq w \leq b \\ y \in \mathbb{R}}} |D_y \hat{q}(w, y)|$$

et  $\hat{q}_N^{(M)}(w)$  est définie par :

$$(4.33) \quad \hat{q}_N^{(M)}(w) = \hat{q}\left(a + \frac{i-1/2}{M} \cdot (b-a), \frac{N}{M} \cdot (i-1/2)\right) \text{ pour}$$

$$\frac{i-1}{M} \leq \frac{w-a}{b-a} \leq \frac{i}{M} \quad i=1, \dots, M.$$

### Démonstration.

Le résultat découle i) de l'inégalité du triangle ii) de la propriété (4.22) (pour estimer l'erreur due au remplacement de  $u$  par  $\hat{u}$ ) iii) des propositions 2-3 et 4 (pour le remplacement de  $q$ ). Notons simplement que :

$$\text{Lip}(\hat{q}_N) = \sup_{a \leq w \leq b} |D_w(\hat{q}(w, N \cdot (\frac{w-a}{b-a})))| \leq \text{Lip}_w(\hat{q}) + N \cdot \text{Lip}_y(\hat{q}) \cdot (b-a)^{-1}$$

ce qui explique le troisième terme à la droite de (4.32).

Considérons maintenant l'erreur obtenue en itérant  $n$  fois les opérateurs  $T(q)$  et  $T(\hat{q}_N^{(M)})$ . Pour cela introduisons :

$$(4.34) \quad E_k(u, \hat{u}) = |T(q)^k \cdot u - T(\hat{q}_N^{(M)})^k \cdot \hat{u}|_{L_1}, \text{ pour } k=0, \dots, n.$$

On a , pour  $k=0, \dots, n$  :

$$(4.35) \quad E_k(u, \hat{u}) \leq |T(q)T(q) \cdot {}^{k-1}u - T(q)T(\hat{q}_N^{(M)}) \cdot {}^{k-1}\hat{u}|_{L_1} + |T(q)v - T(\hat{q}_N^{(M)})v|_{L_1}$$

où  $v = T(\hat{q}_N^{(M)}) \cdot {}^{k-1}\hat{u}.$

En tenant compte de (4.22), on peut majorer le terme de droite de (4.35) par :

$$E_{k-1}(u, \hat{u}) + e(v, v), \quad \text{où } e(.,.) \text{ est définie par (4.32).}$$



Par (4.25), on a  $e(v,v) \leq e(0,0)$  et donc :

$$(4.36) \quad E_k(u,0) \leq E_{k-1}(u,0) + e(0,0).$$

Puisque  $E_0(u,0) = |u-0|_{L_1}$ , on déduit de (4.36) :

$$E_k(u,0) \leq k.e(0,0) + |u-0|_{L_1}$$

On a donc prouvé :

**Proposition 6**

Pour tout entier positif  $n$ , on a :

$$(4.37) \quad |T(q)^n \cdot u - T(q_N^{(M)})^n \cdot 0|_{L_1} \leq n.e(0,0) + |u-0|$$

où  $e(.,.)$  (resp.  $q_N^{(M)}$ ) est définie par (4.32) (resp. (4.33)).

## 5. UNE DISCRETISATION EN TEMPS DE L'EQUATION (0.5).

Dans [4], on a démontré au sujet des solutions entropiques (au sens de Volpert et Hudjaev) de l'équation (0.5) le résultat suivant :

### THEOREME 2

Soit  $u$  dans  $L_1(X)$ . Soit  $A, B$  deux fonctions réelles définies sur  $R$ , telles que  $A, A'$  (dérivée de  $A$ ) et  $B$  soient lipschitziennes et  $A'$  soit positive ou nulle :

$$(5.1) \quad A'(w) \geq 0, \text{ pour tout réel } w.$$

Supposons qu'il existe une unique solution de (0.5) au sens de (3.1)

$$S(\cdot)u : (t, x) \rightarrow (S(t)u)(x) \text{ dans } C^0(R_+ ; L_1(X))$$

telle que  $S(0)u = u$ .

Alors on a :

$$(5.2) \quad S(t)u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{T}(t/n)^n \cdot u \quad (\text{dans } L_1(X)) \text{ pour tout } t > 0,$$

où  $\hat{T}(t)$  est défini pour tout  $t \geq 0$  par :

$$(5.3) \quad (\hat{T}(t)u)(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} ju(x - tB'(w) - (2A'(w)t)^{1/2} \cdot r, w)g(r)dw dr$$

avec  $g(r) = (2\pi)^{-1/2} \cdot \exp(-\frac{1}{2} \cdot r^2)$  et  $ju(\cdot, \cdot)$  défini par (4.10).

On peut réécrire  $\hat{T}(t)u$  à l'aide de la transformation :

$$(5.4) \quad y = \int_{-\infty}^r g(s)ds, \quad 0 < y < 1, \quad dy = g(r)dr.$$

on obtient :

$$(5.5) \quad \hat{T}(t)u(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 j u(x - tB'(w) - (2A'(w)t)^{1/2} \cdot z(y), w) dw dy$$

où  $z$  est la fonction strictement croissante de  $]0,1[$  dans  $\mathbb{R}$  définie de façon implicite par :

$$(5.6) \quad y = \int_{-\infty}^{z(y)} g(s) ds$$

De ce fait l'opérateur  $\hat{T}(t)$  appartient à la classe des opérateurs  $T(q)$  étudiée dans la section précédente, à condition de poser :

$$(5.7) \quad q(w, y) = tB'(w) + (2A'(w)t)^{1/2} \cdot z(y).$$

Néanmoins, cette écriture n'est pas la meilleure et on peut trouver une autre fonction  $q$  telle que  $\hat{T}(t) = T(q)$ , ayant de meilleures propriétés. Pour le voir réécrivons (5.5) en utilisant successivement les deux transformations

$$i) \quad y = 2s, \quad s \in [0, \frac{1}{2}], \quad dy = 2ds$$

$$ii) \quad y = 2-2s, \quad s \in [\frac{1}{2}, 1], \quad dy = -2ds$$

On obtient respectivement

$$(5.8) \quad \hat{T}(t)u(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{1/2} 2j u(x - tB'(w) - (2A'(w)t)^{1/2} \cdot z(2s), w) dw ds$$

$$(5.9) \quad \hat{T}(t)u(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{1/2}^1 2j u(x - tB'(w) - (2A'(w)t)^{1/2} \cdot z(2-2s), w) dw ds$$

et en effectuant la demi somme de (5.8) et (5.9) :

$$(5.10) \quad \hat{T}(t)u(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 j u(x - tB'(w) - (2A'(w)t)^{1/2} \cdot r(y), w) dw dy$$

où  $r$  est définie sur  $]0,1[$  par :

$$(5.11) \quad r(y) = z(2y) \text{ si } 0 < y < \frac{1}{2}, \quad z(2-2y) \text{ si } \frac{1}{2} < y < 1,$$

et étendue par périodicité à  $\mathbb{R}$  tout entier

$$(5.12) \quad r(y+1) = r(y).$$

Introduisons pour tout réel  $c$  positif,

$$(5.13) \quad r_c(y) = \min(c, \max(r(y), -c)).$$

Cette fonction est bornée, lipschitzienne et converge vers  $r$  dans  $L_1(0,1)$  quand  $c$  tend vers l'infini. Plus précisément on a :

$$(5.14) \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} |r_c(y)| = c$$

$$(5.15) \quad \text{Lip}(r_c) = 2g(c)^{-1}$$

$$(5.16) \quad \int_0^1 |r(y) - r_c(y)| dy = 2 \int_c^\infty \left( \int_s^\infty g(r) dr \right) ds = 2 \int_c^\infty (r-c) g(r) dr \\ \leq 2 \int_c^\infty r g(r) dr = 2g(c).$$

D'après (5.10) et (4.19), on a donc :

$$(5.17) \quad \hat{T}(t) = T(q), \quad \text{avec}$$

$$(5.18) \quad q(w, y) = tB'(w) + (2A'(w)t)^{1/2} \cdot r(y)$$

et on va maintenant appliquer la proposition 2 avec :

$$(5.19) \quad \hat{q}(w, y) = tB'(w) + (2A'(w)t)^{1/2} \cdot r_c(y).$$

On a :

$$I = \int_0^1 \sup_{a \leq w \leq b} |q(w, y) - \hat{q}(w, y)| dy \leq (2t \sup_{a \leq w \leq b} A'(w))^{1/2} \cdot \int_0^1 |r(y) - r_c(y)| dy$$

d'où :

$$(5.20) \quad I \leq (2t \cdot \sup A')^{1/2} \cdot 2g(c) \quad (\text{d'après (5.16)}).$$

De plus :

$$(5.21) \quad \text{Lip}_w(q) \leq t \cdot \text{Lip}(B') + (2t)^{1/2} \text{Lip}((A')^{1/2}) \cdot c$$

(à cause de (5.14))

$$(5.22) \quad \text{Lip}_y(q) \leq (2t \sup A')^{1/2} \cdot 2g(c)^{-1}$$

(à cause de (5.15)).

Ainsi, d'après la définition (4.32), on a:

$$(5.23) \quad e(u, \Omega) = (2t \sup A')^{1/2} \cdot 2g(c) \text{TV}(\Omega) \\ + \left(\frac{b-a}{N}\right) \cdot (4L + \text{TV}(\Omega) \cdot (t \cdot \text{Lip}(B') + (2t)^{1/2} \text{Lip}(A')^{1/2}) \cdot c) \\ + \left(\frac{b-a}{M}\right) \cdot (t \cdot \text{Lip}(B') + (2t)^{1/2} \text{Lip}(A')^{1/2}) c + \frac{N}{b-a} \cdot (2t \sup A')^{1/2} \\ \cdot 2g(c)^{-1} \text{TV}(\Omega) + |u - \Omega|_{L_1}.$$

Si maintenant on remplace  $t$  par  $t/n$  et qu'on applique la proposition 6, on obtient :

### Proposition 7

Soit  $q_{n,c,N,M}$  définie par :

$$(5.24) \quad q_{n,c,N,M}^{(w,y)} = \frac{t}{n} B' \left( a + \frac{i-1/2}{M} \cdot (b-a) \right) \\ + \left( 2 \frac{t}{n} A' \left( a + \frac{i-1/2}{M} \cdot (b-a) \right) \right)^{1/2} \cdot r_c \left( \frac{N}{M} \cdot (i-1/2) \right)$$

pour  $\frac{i-1}{M} < \frac{w-a}{b-a} < \frac{i}{M}$  et  $i=1, \dots, M$

Alors on a :

$$|\hat{T}(\frac{t}{n})^n \cdot u - T(q_{n,c,N,M})^n \cdot \Omega|_{L_1} \leq |u - \Omega|_{L_1} + e_{n,c,N,M}(\Omega)$$

où

$$(5.25) \quad e_{n,c,N,M}(\Omega) = C_1 n N^{-1} + TV(\Omega) \cdot (C_2 g(c) n^{1/2} + C_3 N^{-1} + C_4 n^{1/2} N^{-1} c + C_5 M^{-1} + C_6 n^{1/2} M^{-1} c + C_7 n^{1/2} M^{-1} Ng(c)^{-1})$$

où les  $C_k$  ( $k=1, \dots, 7$ ) ne dépendent que de :

$$t, b-a, \sup A', \text{Lip}(B'), \text{Lip}(A')^{1/2}.$$

Notons que dans le cas de l'équation (0.4), i.e. quand  $A$  est nul, les paramètres  $N$  et  $c$  sont superflus dans (5.24) et  $e_{n,c,N,M}(\Omega)$  peut être remplacé par  $C TV(\Omega) M^{-1}$  où  $C = C_5 = (b-a)t\text{Lip}(B')$ .

Revenons au cas général. En posant :

$$(5.26) \quad c = (2\alpha \text{Log } n)^{1/2} ; N = n^\beta ; M = n^\gamma, \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma > 0,$$

avec  $n$  tendant vers l'infini, on obtient  $g(c) = O(n^{-\alpha})$  et :

$$(5.27) \quad e_{n,c,N,M}(\Omega) = O(n^{1/2-\alpha} + n^{1-\beta} + n^{1/2+\alpha+\beta-\gamma}), \quad n \rightarrow \infty,$$

L'erreur est donc d'ordre  $n^{-\delta}$  dès que :

$$(5.28) \quad \alpha = \frac{1}{2} + \delta ; \beta = 1 + \delta ; \gamma = 2+3\delta, \quad \delta > 0.$$

c'est-à-dire :

$$(5.29) \quad c = ((1 + \frac{\delta}{2}) \text{Log } n)^{1/2} ; N = n^{1+\delta} ; M = n^{2+3\delta}.$$

Conséquemment, on a :

**Proposition 8**

Si  $q_{n,c,N,M}$  est définie par (5.24) et si (5.29) est satisfaite, alors on a l'estimation d'erreur (quand  $n$  tend vers l'infini):

$$(5.30) \quad \left| \hat{T}\left(\frac{t}{n}\right)^n \cdot u - T(q_{n,c,N,M})^n \cdot \hat{u} \right|_{L_1} \leq |u - \hat{u}|_{L_1} + C n^{-\delta}, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

où  $C$  dépend seulement de  $TV(\hat{u})$ ,  $t$ ,  $b-a$ ,  $\sup(A')$ ,  $Lip(B')$ ,  $Lip(A')^{1/2}$ .

**Remarque**

Dans le cas de l'équation (0.4),  $N$  et  $c$  sont superflus et il suffit de choisir  $M = n^\delta$  pour obtenir (5.30) (voir la précédente remarque). Cela montre qu'avec le schéma utilisé, la convergence est (beaucoup) plus lente lorsque le terme de diffusion est présent.

**Preuve du théorème 1.**

A l'aide du théorème 2 et de la proposition 8, nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1. Remarquons d'abord que, sans perte de généralité, on peut supposer :

$$(5.31) \quad 0 \leq u(0,x) \leq 1, \quad \text{p.p.}$$

puisque  $u(0, \cdot)$  est supposée bornée, quitte à remplacer  $u(t,x)$ ,  $A(u)$  et  $B(u)$  respectivement par :

$$(5.32) \quad \frac{u(t,x)-a}{b-a}, \frac{A(u)}{b-a}, \frac{B(u)}{b-a} \quad \text{où} \quad -\infty < a \leq u(0, \cdot) \leq b < +\infty.$$

Ainsi, il est correct de remplacer  $a, b$  par  $0, 1$  dans (5.24). On peut, par ailleurs, trouver une approximation  $u_0$  de  $u(0, \cdot)$  dépendant du paramètre de discrétisation  $\Delta u$ , satisfaisant (3.5), convergeant vers  $u(0, \cdot)$  quand  $\Delta u$  tend vers 0, de variation uniformément bornée :

$$(5.33) \quad |u(0,.) - u_0|_{L_1} \rightarrow 0, \Delta u \rightarrow 0, \sup_{\Delta u \rightarrow 0} TV(u_0) < +\infty.$$

Alors, en remplaçant  $S(t)u$  et  $u$  par  $u(t,.)$  et  $u(0,.)$  dans l'énoncé du théorème 2,  $q_{n,c,N,M}$  et  $\Omega$  par  $q$  et  $u_0$  dans l'énoncé de la proposition 8, et en utilisant l'inégalité du triangle, on obtient finalement :

$$(5.34) \quad |u(t,.) - T(q)^n u_0|_{L_1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

c'est-à-dire exactement (3.7), ce qui prouve donc le théorème 1.



**A. ANNEXE : DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3**

La démonstration de la proposition repose sur le lemme suivant :

**LEMME 2**

Soit  $f(w,y)$  une fonction régulière définie sur  $[a,b] \times \mathbb{R}$  de période 1 en  $y$  :

$$(a.1) \quad f(w,y+1) = f(w,y)$$

Alors pour tout entier positif  $N$ , on a :

$$(a.2) \quad \left| \int_a^b \int_0^1 f(w,y) dw dy - \int_a^b f(w, N \cdot \frac{w-a}{b-a}) dw \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{N} \cdot \left\{ 2 \sup_{\substack{a \leq w \leq b \\ 0 \leq y \leq 1}} |f(w,y)| + \int_a^b \int_0^1 |D_w f(w, N \cdot \frac{w-a}{b-a} - sc)| dw ds dc \right\}$$

**Preuve**

Il est clair qu'on peut se ramener sans perte de généralité au cas  $a=0, b=1$ . Puisque  $f$  est de période 1 par rapport à  $y$ , il est équivalent d'intégrer  $f$  sur le carré  $[0,1] \times [0,1]$  où sur la partie de  $[0,1] \times \mathbb{R}$ :  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  où :

$$S_1 = \{(w,y) ; 0 \leq y \leq N-1, \frac{y}{N} \leq w \leq \frac{y+1}{N} \}$$

$$S_2 = \{(w,y) ; 0 \leq w \leq \frac{1}{N}, Nw \leq y \leq 1 \}$$

$$S_3 = \{(w,y) ; 1 - \frac{1}{N} \leq w \leq 1, N-1 \leq y \leq Nw \}$$

Puisque  $S_2$  et  $S_3$  sont de mesure  $\frac{1}{2N}$ , on a la majoration suivante :

$$(a.3) \quad \left| \int_0^1 \int_0^1 f(w,y) dw dy - \int_{S_1} f(w,y) dw dy \right| \leq \frac{1}{N} \sup_{\substack{w \in [0,1] \\ y \in [0,1]}} |f(w,y)|$$

Réécrivons maintenant l'intégrale  $I = \int_{S_1} f(w,y) dw dy$  sous la forme :

$$(a.4) \quad I = \int_0^{\frac{y+1}{N}} \left( \int_{\frac{y}{N}}^{\frac{y+1}{N}} f(w,y) dw \right) dy = \int_0^{\frac{y+1}{N}} \left( \int_0^1 \frac{1}{N} \cdot f\left(\frac{y+s}{N}, y\right) ds \right) dy$$

et comparons la à :

$$(a.5) \quad J = \int_0^{1-\frac{1}{N}} f(w, Nw) dw = \int_0^{\frac{y}{N}} \frac{1}{N} \cdot f\left(\frac{y}{N}, y\right) dy$$

On a :

$$I-J = \int_0^{\frac{y+1}{N}} \frac{1}{N} \cdot \left( \int_0^1 \left[ f\left(\frac{y+s}{N}, y\right) - f\left(\frac{y}{N}, y\right) \right] ds \right) dy$$

c'est-à-dire :

$$I-J = \int_0^{\frac{y+1}{N}} \frac{1}{N} \cdot \left( \int_0^1 \int_0^1 D_w f\left(\frac{y+sc}{N}, y\right) \frac{s}{N} dc ds \right) dy$$

A l'aide du changement de variable

$$w = \frac{y+sc}{N}, \quad dw = \frac{dy}{N}, \quad \frac{sc}{N} \leq w \leq 1 - \left(\frac{1-sc}{N}\right),$$

on transforme l'intégrale en :

$$I-J = \int_0^1 \int_0^1 \left( \int_{\frac{sc}{N}}^{1-\frac{1-sc}{N}} D_w f(w, Nw-sc) \frac{s}{N} dw \right) ds dc$$

d'où la majoration :

$$(a.6) \quad |I-J| \leq \frac{1}{N} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |D_w f(w, Nw-sc)| dw ds dc$$

D'autre part, on a :

$$(a.7) \quad \left| J - \int_0^1 f(w, Nw) dw \right| \leq \int_0^1 |f(w, Nw)| dw \leq \frac{1}{N} \cdot \sup_{\substack{0 \leq w \leq 1 \\ y \in \mathbb{R}}} |f(w, y)|.$$

Finalement, en réunissant (a.3-4-5-6-7), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \int_0^1 f(w, y) dw dy - \int_0^1 f(w, Nw) dw \right| &\leq \frac{1}{N} \cdot \left\{ 2 \sup_{\substack{0 \leq w \leq 1 \\ y \in \mathbb{R}}} |f(w, y)| + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |D_w f(w, Nw - sc)| dw ds dc \right\} \end{aligned}$$

ce qui démontre bien le lemme dans le cas  $a=0$ ,  $b=1$ .

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 3. Soit  $u(x)$  une fonction intégrable sur le tore  $X$ , de variation  $TV(u)$  bornée, telle que  $a \leq u(x) \leq b$ , p.p.. Comme il a été vu plus haut (section 4) la fonction  $h = ju(x, w)$  a les propriétés suivantes (voir (4.14...16))

$$(a.8) \quad h(x, w) = 0 \text{ pour } w \text{ hors de } [a, b] \text{ et } |h(x, w)| \leq 1 \text{ p.p.}$$

$$(a.9) \quad TV_x(h) \leq TV(u)$$

$$(a.10) \quad TV_w(h) \leq 2L$$

Il est possible d'approcher  $ju$  dans  $L_1(X \times \mathbb{R})$  par une fonction régulière  $h = h(x, w)$  vérifiant encore (a.8...10) (on passe sur la démonstration de ce point). Puisque  $T(q)u$  et  $T(q_N)$  sont définies par :

$$\begin{aligned} T(q)u(x) &= \int_a^b \int_0^1 ju(x - q(w, y), w) dw dy \\ T(q_N)u(x) &= \int_a^b ju(x - q(w, N \cdot (\frac{w-a}{b-a})), w) dw \end{aligned}$$

il suffit pour démontrer 3, de comparer

$$(a.11) \quad I(x) = \int_a^b h(x-q(w, N \cdot (\frac{w-a}{b-a})), w) dw$$

$$(a.12) \quad J(x) = \int_a^b \int_0^1 h(x-q(w, y), w) dw dy,$$

où  $h(x, w)$  est une fonction régulière vérifiant (a.8...10). Du lemme 2, on tire :

$$|I(x)-J(x)| \leq \frac{1}{N} \cdot (b-a) \left\{ 2 \cdot \sup_{\substack{a \leq w \leq b \\ y \in \mathbb{R}}} |f(w, y)| + \int_a^b \int_0^1 |D_w f(w, N \cdot (\frac{w-a}{b-a}) - sc)| dw ds dc \right\}$$

où  $(x$  étant considéré comme un paramètre):

$$(a.13) \quad f(w, y) = h(x-q(w, y), w)$$

Or on a (par (a.8))

$$(a.14) \quad \sup_{\substack{a \leq w \leq b \\ y \in \mathbb{R}}} |f(w, y)| \leq 1$$

puis :

$$D_w f(w, y) = -D_x h(x-q(w, y), w) D_w q(w, y) + D_w h(x-q(w, y), w)$$

et donc, en introduisant

$$C = \sup \{ |D_w q(w, y)| ; a \leq w \leq b ; y \in \mathbb{R} \}$$

on a :

$$|D_w f(w, y)| \leq (|D_w h| + C |D_x h|)(x-q(w, y), w)$$

ce qui nous conduit à :

$$\begin{aligned} \int_X |I(x)-J(x)| dx &\leq \frac{1}{N} \cdot (b-a) \left\{ 2L + \int_a^b \int_0^1 \int_0^1 (|D_w h| + C |D_x h|)(x-q(w, N \cdot (\frac{w-a}{b-a}) - sc), w) dw ds dc dx \right\} \\ &= \frac{1}{N} \cdot (b-a) \left\{ 2L + \int_a^b \int_0^1 \int_0^1 (|D_w h| + C |D_x h|)(x, w) dx dw ds dc \right\} \end{aligned}$$

(puisque  $h$  est périodique par rapport à  $x$ ).

Par conséquent, on a :

$$(a.15) \quad \int_X |I(x) - J(x)| dx \leq \frac{1}{N} \cdot (b-a) \left\{ 2L + \iint_{Xa}^b (|D_w h| + C |D_x h|)(x, w) dx dw \right\}$$

Grâce à (a.11) et (a.12), on voit que le terme de gauche dans (a.15) est égal à

$$(a.16) \quad \int_X \left| \int_a^b h(x - q(w, N \cdot \frac{w-a}{b-a}), w) dw - \int_a^b \int_0^1 h(x - q(w, y), w) dw dy \right| dx$$

et le terme de droite est majoré par :

$$(a.17) \quad \frac{(b-a)}{N} \cdot (4L + C TV(u)),$$

puisque  $h$  satisfait (a.9) et (a.10). donc, en utilisant une approximation convenable  $h$  de  $j_u$  dans (a.16), on obtient finalement :

$$(a.18) \quad |T(q)u - T(q_N)u|_{L_1} \leq \frac{1}{N} \cdot (b-a) \cdot (4L + TV(u) \cdot Lip_w(q))$$

où  $Lip_w(q) = \sup_{\substack{a \leq w \leq b \\ y \in \mathbb{R}}} |D_w q(w, y)|$ , ce qui termine la démonstration de la

proposition 3.

# REFERENCES

- [1] J.T.Beale, A.Majda, Vortex methods II,  
Math. of Comp. 39(1982), pp.29-52.
- [2] Y.Brenier, Calcul de lois de conservation scalaires par la méthode de  
transport-écroulement,  
rapport INRIA no 53(1981).
- [3] Y.Brenier, Résolution d'équations d'évolution quasilinéaires en  
dimension N d'espace à l'aide d'équations linéaires en dimension N+1,  
Journal of Differential Equations, 50(1983), pp.375-390
- [4] Y.Brenier, Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws,  
SIAM Journal on Numerical Analysis, 21(1984), pp. 1013-1037.
- [5] A.J.Chorin, Numerical methods for use in combustion modeling,  
Proceedings of the 4th international symposium on computing methods,  
Versailles, dec.1979,  
North-Holland (1980).
- [6] A.J.Chorin, Numerical study of slightly viscous flows,  
J. of Fluids Mech. 57(1973), pp. 785-796.
- [7] A.J.Chorin, Vortex sheet approximation of boundary layers,  
J. Comp. Phys. 27(1978), pp. 428-442.
- [8] O.Hald, Convergence of random methods for a reaction diffusion  
equation,  
SIAM J. Sc. Stat. Comp., 2(1981), pp.85-94

- [9] O.Hald, Convergence of a random method with creation of vorticity, University of California Berkeley, report PAM 252(1984).
- [10] O.Hald, Convergence of vortex methods II, SIAM Journal on Numerical Analysis, 16(1979), pp.726-755
- [11] S.I.Hudjaev, A.I.Volpert, Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations, Math. USSR. Sb. 7 (1969) pp.365-387.
- [12] S.N.Kruzhkov, First order quasilinear equations with several space variables, Math. USSR Sb. 10 (1970), pp.217-243.
- [13] P.-A.Raviart, An analysis of particle methods. CIME Course, COMO(1983).

